Uma nova demonstração do Teorema de Motzkin

Ronaldo Freire de Lima

UFRN

Apresentamos neste artigo uma demonstração inédita do Teorema de Motzkin, que estabelece, para um dado conjunto fechado $A \subset \mathbb{R}^n$, a equivalência entre as seguintes afirmações:

- A função distância a A é diferenciável em $\mathbb{R}^n - A$.
- Existe uma projeção $\pi : \mathbb{R}^n \to A$ em que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\pi(x)$ é o ponto de A mais próximo de x.
- A é convexo.

1 Introdução

No espaço $\mathbb{R}^n$, a noção de distância entre dois pontos é naturalmente estendida à de distância entre ponto e conjunto. Mais precisamente, a *distância* $d(x, A)$ de um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ a um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é definida por

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|\,, \tag{1.1}$$

em que $\| \ \|$ denota a norma euclidiana de $\mathbb{R}^n$.

Do ponto de vista da topologia e da análise, surgem, então, as questões:

- Para um dado conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, que propriedades tem a *função distância* a A, $x \mapsto d(x, A)$?
- Quais são as relações das propriedades topológicas e métricas de A com as propriedades dessa função distância?

Neste contexto, quando o conjunto A é um subespaço vetorial próprio de $\mathbb{R}^n$, constata-se facilmente que:

- A função distância a A é diferenciável em $\mathbb{R}^n - A$;
- existe uma projeção[1] $\pi : \mathbb{R}^n \to A$, tal que $d(x, A) = \|x - \pi(x)\|$;
- A é convexo.

Em consideração às duas questões levantadas acima, um fato notável é que estas três afirmações são equivalentes e o são para qualquer conjunto fechado A. Este resultado, conhecido como Teorema de Motzkin, constitui uma importante caracterização dos conjuntos convexos (fechados) de espaços euclidianos e deve seu nome ao matemático alemão Theodore Motzkin (1908-1970), que o estabeleceu [4].

No que se segue, introduziremos alguns conceitos e resultados relativos à função distância e forneceremos uma demonstração inédita do Teorema de Motzkin valendo-nos de conceitos e teoremas elementares da topologia e da análise do espaço $\mathbb{R}^n$.

2 Notação

Dados $x \in \mathbb{R}^n$ e um número real $r > 0$, as bolas aberta e fechada de $\mathbb{R}^n$, com centro em x e raio r, serão respectivamente denotadas por $B(x, r)$ e $B[x, r]$. Mais precisamente,

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n ; \|y - x\| < r\}$$

e

$$B[x, r] = \{y \in \mathbb{R}^n ; \|y - x\| \leq r\}\,.$$

Além disso, a esfera, com mesmo centro e raio, será indicada por $S[x, r]$, ou seja,

$$S[x, r] = \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x\| = r\}\,.$$

[1] Uma aplicação $\pi : \mathbb{R}^n \to A \subset \mathbb{R}^n$ é uma *projeção* sobre A se $\pi \circ \pi = \pi$.

Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, denotaremos os segmentos de reta aberto e fechado com extremos x e y por (x, y) e $[x, y]$, respectivamente, isto é,

$$(x, y) = \{x + t(y - x) \in \mathbb{R}^n;\ t \in (0, 1)\}$$

e

$$[x, y] = \{x + t(y - x) \in \mathbb{R}^n;\ t \in [0, 1]\}.$$

Ademais, nos referiremos ao conjunto

$$\{x + t(y - x) \in \mathbb{R}^n;\ t \in [0, +\infty)\}$$

como a semirreta com origem em x e que contém y.

Por fim, dados um aberto U de $\mathbb{R}^n$ e uma função diferenciável $f : U \to \mathbb{R}$, indicaremos o vetor gradiente de f num ponto $x \in U$ por $\nabla f(x)$ e a derivada de f em x por $f'(x)$, isto é, dado $h \in \mathbb{R}^n$, escreveremos

$$f'(x)h = \langle \nabla f(x), h \rangle,$$

em que $\langle\ ,\ \rangle$ denota o produto interno canônico de $\mathbb{R}^n$.

3 Projeções – conjuntos de Chebyshev

Considerando-se a definição (1.1), tem-se, para todo conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ e todo ponto $x \in \mathbb{R}^n$, que existe uma sequência (a_k) em A, tal que

$$\|x - a_k\| \to \inf_{a \in A} \|x - a\| = d(x, A).$$

Logo, uma vez que $\|a_k\| \leq \|a_k - x\| + \|x\|$, tem-se que (a_k) é limitada e possui, desta forma, uma subsequência convergente, (a_{k_i}). Daí e da continuidade da função norma, segue-se que

$$d(x, A) = \lim_{k \to \infty} \|x - a_k\| = \lim_{i \to \infty} \|x - a_{k_i}\| = \|x - a\|,$$

em que $a = \lim_{i \to \infty} a_{k_i}$.

Destas considerações, infere-se que se $A \subset \mathbb{R}^n$ é fechado, então, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, existe $a \in A$, tal que $d(x, A) = \|x - a\|$. Neste caso, o ponto a não é, necessariamente, único. Tomando-se uma esfera $S[x, r]$ de $\mathbb{R}^n$, por exemplo, tem-se que todo ponto $a \in S[x, r]$ cumpre $d(x, S[x, r]) = \|x - a\| = r$.

Dados, então, um conjunto fechado $A \subset \mathbb{R}^n$ e $x \in \mathbb{R}^n$, designaremos por $\Pi(x)$ o conjunto formado por todos os pontos de A que realizam a distância de x a A, isto é,

$$\Pi(x) = \{a \in A;\ \|x - a\| = d(x, A)\}.$$

Note que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\Pi(x)$ é compacto, pois é fechado, em virtude da continuidade da função $a \mapsto \|x - a\|$, e, como se pode verificar facilmente, limitado.

Proposição 1. *Dado um conjunto fechado $A \subset \mathbb{R}^n$, a função distância a A, definida por*

$$\begin{array}{rccc} d_A : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & d(x, A), \end{array}$$

é lipschtziana. Em particular, d_A é uniformemente contínua.

Demonstração. Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, para quaisquer $a \in \Pi(x)$ e $b \in \Pi(y)$, tem-se

$$d_A(x) - d_A(y) = \|x - a\| - \|y - b\|.$$

Além disso, $\|x - a\| \leq \|x - b\|$, $\|y - b\| \leq \|y - a\|$. Logo, usando a desigualdade triangular,

$$\begin{aligned} -\|x - y\| &\leq \|x - a\| - \|y - a\| \\ &\leq \|x - a\| - \|y - b\| \\ &\leq \|x - b\| - \|y - b\| \\ &\leq \|x - y\|, \end{aligned}$$

isto é,

$$|d_A(x) - d_A(y)| \leq \|x - y\|,$$

donde d_A é lipschtziana. □

Diz-se que um subconjunto fechado $A \subset \mathbb{R}^n$ é um *conjunto de Chebyshev*[2] se, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\Pi(x)$ contém um único elemento $a \in A$, que designaremos por $\pi(x)$. Neste caso, fica bem definida a aplicação *projeção sobre A*,

$$\begin{array}{rccc} \pi : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & A \\ & x & \longmapsto & \pi(x) \end{array},$$

a qual, para todo ponto $x \in \mathbb{R}^n$, satisfaz

$$d_A(x) = \|x - \pi(x)\|.$$

Proposição 2. *A projeção sobre um conjunto de Chebyshev $A \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua.*

[2] Em consideração ao matemático russo Pafnuty Chebyshev (1821-1894), um dos fundadores da teoria da aproximação, cujos temas envolvem questões relativas a projeções e convexidade.

Demonstração. Tomemos a projeção sobre A, $\pi : \mathbb{R}^n \to A$, e uma sequência (x_k) em $\mathbb{R}^n$, tal que $x_k \to x_0$. Uma vez que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|\pi(x)\| \leq \|\pi(x) - x\| + \|x\| = d_A(x) + \|x\|,$$

temos que a sequência $(\pi(x_k))$ é limitada, pois, pela continuidade de d_A, bem como da função norma, as sequências $(d_A(x_k))$ e $(\|x_k\|)$ são convergentes, donde, limitadas. Logo, $(\pi(x_k))$ possui uma subsequência convergente, $(\pi(x_{k_i}))$. Fazendo-se, então, $a = \lim_{i\to\infty} \pi(x_{k_i})$, tem-se

$$\|x_0 - a\| = \lim_{i\to\infty} \|x_{k_i} - \pi(x_{k_i})\| = \lim_{i\to\infty} d_A(x_{k_i}) = d_A(x_0),$$

donde se infere que $a = \pi(x_0)$ e, portanto, que π é contínua. □

4 O Teorema de Motzkin

Teorema de Motzkin. *As seguintes afirmações a respeito de um subconjunto fechado A de $\mathbb{R}^n$ são equivalentes:*

i) *d_A é diferenciável em $\mathbb{R}^n - A$.*

ii) *A é um conjunto de Chebyshev.*

iii) *A é convexo.*

Apresentaremos agora uma demonstração do Teorema de Motzkin que terá como base os dois lemas seguintes, os quais, por sua vez, estabelecem propriedades interessantes da função distância d_A e da projeção π, respectivamente. As demonstrações dos mesmos são de nossa autoria, assim como o é a de que, no Teorema de Motzkin, (ii) implica (iii). O Lema 1 é citado em [3]. No entanto, sua demonstração não é fornecida e a referência a ela dada não nos foi acessível. Quanto ao Lema 2, este é demonstrado em [8] como aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, enquanto a nossa demonstração vale-se de um corolário do Lema 1. Uma demonstração essencialmente geométrica da equivalência entre (ii) e (iii) pode ser encontrada em [7].

Lema 1. *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a função distância a A ao quadrado, isto é, $f(x) = d_A^2(x)$. Então, dado $x \in \mathbb{R}^n$, a função*

$$T(h) = \min_{a\in\Pi(x)} 2\langle x - a, h\rangle, \ h \in \mathbb{R}^n,$$

cumpre as seguintes condições:

i) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - T(h)}{\|h\|} = 0;$

ii) $\displaystyle\lim_{t\to 0_+} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} = T(h).$

Cabe-nos observar que, no lema acima, a função T está bem definida (pois, conforme assinalamos na seção anterior, para todo $x \in A$, o conjunto $\Pi(x)$ é compacto) e é sugerida pela transformação linear $Th = 2\langle x - \pi(x), h\rangle$, que é a derivada de d_A^2 em $x \in \mathbb{R}^n$ quando A é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$. Deve-se notar também que a igualdade (i) não assegura que f seja diferenciável em x, a menos que T seja linear.

Demonstração do Lema 1. Tomemos $x \in \mathbb{R}^n$ e observemos que, devido à compacidade de $\Pi(x)$ e à continuidade da função $a \mapsto 2\langle x - a, h\rangle$, para cada $h \in \mathbb{R}^n$, o conjunto

$$\Pi_h(x) = \{a \in \Pi(x);\ T(h) = 2\langle x - a, h\rangle\}$$

é não-vazio.

Assim, dados $h_0, h \in \mathbb{R}^n$, para quaisquer $a_h \in \Pi_{h_0+h}(x)$ e $a \in \Pi_{h_0}(x)$, tem-se

$$T(h_0 + h) - T(h_0) = 2\langle x - a_h, h_0 + h\rangle - 2\langle x - a, h_0\rangle.$$

Porém,

$$\langle x - a_h, h_0 + h\rangle \leq \langle x - a, h_0 + h\rangle$$

e

$$\langle x - a, h_0\rangle \leq \langle x - a_h, h_0\rangle.$$

Logo,

$$2\langle x - a_h, h\rangle \leq T(h_0 + h) - T(h_0) \leq 2\langle x - a, h\rangle. \quad (4.1)$$

Uma vez que $|\langle x - a_h, h\rangle| \leq \|x - a_h\| \, \|h\| = d_A(x)\|h\|$ (note que $a_h \in \Pi(x)$), tem-se $\lim_{h\to 0}\langle x - a_h, h\rangle = 0$. Segue-se, portanto, de (4.1), que

$$\lim_{h\to 0} T(h_0 + h) = T(h_0),$$

donde T é contínua.

Agora, tomando-se $h \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, $a_h \in \Pi(x + h)$ e $a \in \Pi(x)$, valem as desigualdades

$$\|x + h - a_h\| \leq \|x + h - a\|, \ \|x - a\| \leq \|x - a_h\|.$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
2\langle x - a_h, h\rangle + \|h\|^2 &\leq f(x+h) - f(x) \\
&\leq 2\langle x - a, h\rangle + \|h\|^2 .
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

Assim, tomando-se $a \in \Pi_h(x) \subset \Pi(x)$ e observando-se que, para todo real $t > 0$, $T(th) = tT(h)$, obtém-se, de (4.2), as desigualdades

$$
\begin{aligned}
2\left\langle x - a_h, \frac{h}{\|h\|}\right\rangle - T\left(\frac{h}{\|h\|}\right) + \|h\| \\
\leq \frac{f(x+h) - f(x) - T(h)}{\|h\|} \leq \|h\| .
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Em particular,

$$
\begin{aligned}
2\left\langle x - a_h, \frac{h}{\|h\|}\right\rangle - T\left(\frac{h}{\|h\|}\right) \leq 0 , \\
\forall a_h \in \Pi(x+h) .
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

Provemos, então, que o primeiro membro de (4.4) tem limite nulo quando h tende a zero. Para tanto, tomemos uma sequência (h_k) em $\mathbb{R}^n - \{0\}$, tal que $h_k \to 0$. Passando-se a uma subsequência, se necessário, podemos supor que

$$
u_k = \frac{h_k}{\|h_k\|} \to u, \quad \|u\| = 1 .
$$

Tomando-se uma sequência (a_k) em $\mathbb{R}^n$ satisfazendo $a_k \in \Pi(x + h_k)$ para cada $k \in \mathbb{N}$, tem-se, para todo $b \in A$, que

$$
\|a_k\| - \|x + h_k\| \leq \|x + h_k - a_k\| \leq \|x + h_k - b\| . \tag{4.5}
$$

Considerando-se a primeira e última expressões destas desigualdades, obtém-se

$$
\|a_k\| \leq \|x + h_k - b\| + \|x + h_k\| .
$$

Uma vez que as sequências que têm como termos gerais $\|x + h_k - b\|$ e $\|x + h_k\|$ são limitadas (por serem convergentes), segue-se desta desigualdade que vale o mesmo para a sequência (a_k). Assim, passando-se novamente a uma subsequência, podemos supor que $a_k \to a_0 \in \Pi(x)$, pois, tomando-se os limites de ambos os membros na segunda desigualdade (4.5), obtém-se $\|x - a_0\| \leq \|x - b\|, \forall b \in A$.

Segue-se, portanto, destas últimas considerações, da continuidade de T e de (4.4), que

$$
\begin{aligned}
2\langle x - a_0, u\rangle &= \lim_{k\to\infty} 2\langle x - a_k, u_k\rangle \\
&\leq \lim_{k\to\infty} T(u_k) = T(u) \\
&= \min_{a\in\Pi(x)} 2\langle x - a, u\rangle ,
\end{aligned}
$$

donde $2\langle x - a_0, u\rangle = T(u)$. Desta forma,

$$
\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\left[2\left\langle x - a_k, \frac{h_k}{\|h_k\|}\right\rangle - T\left(\frac{h_k}{\|h_k\|}\right)\right] \\
= 2\langle x - a_0, u\rangle - T(u) = 0 .
\end{aligned}
$$

Desta igualdade e da arbitrariedade das sequências (h_k) e (a_k), obtém-se

$$
\lim_{h\to 0}\left[2\left\langle x - a_h, \frac{h}{\|h\|}\right\rangle - T\left(\frac{h}{\|h\|}\right)\right] = 0 ,
$$

que, juntamente com a desigualdade (4.3), nos dá

$$
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - T(h)}{\|h\|} = 0
$$

e conclui a demonstração de (i).

Quanto a (ii), basta observarmos que, para todo real $t > 0$,

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x+th) - f(x)}{t} - T(h) \\
= \frac{f(x+th) - f(x) - T(th)}{\|th\|}\|h\| ,
\end{aligned}
$$

donde, valendo-se de (i), obtém-se

$$
\lim_{t\to 0_+} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} = T(h) ,
$$

como desejado. □

Corolário 1. *Nas condições do Lema 1, se A é um conjunto de Chebyshev, então d_A^2 é diferenciável e, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$
\nabla d_A^2(x) = 2(x - \pi(x)) .
$$

Demonstração. Com efeito, sendo A um conjunto de Chebyshev, tem-se, para quaisquer $x, h \in \mathbb{R}^n$, que

$$
T(h) = \min_{a\in\Pi(x)} 2\langle x - a, h\rangle = 2\langle x - \pi(x), h\rangle ,
$$

donde T é linear. O resultado segue-se, então, do item (i) do Lema 1. □

Lema 2. *Sejam* $A \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto de Chebyshev e* $x_0 \in \mathbb{R}^n - A$. *Então, todo ponto* x *da semirreta* σ, *que tem origem em* $\pi(x_0)$ *e contém* x_0, *satisfaz* $\pi(x) = \pi(x_0)$.

Demonstração. Dado $x \in \mathbb{R}^n - A$, todo ponto y do segmento $[\pi(x), x]$ é tal que $\pi(y) = \pi(x)$. Com efeito, neste caso, temos $\|x - \pi(x)\| = \|x - y\| + \|y - \pi(x)\|$. Logo,

$$\begin{aligned}\|x - \pi(y)\| &\leq \|x - y\| + \|y - \pi(y)\| \\ &\leq \|x - y\| + \|y - \pi(x)\| \\ &= \|x - \pi(x)\|,\end{aligned}$$

donde $\pi(y) = \pi(x)$.

Desta forma, devemos nos ocupar apenas dos pontos da semirreta $\sigma_0 \subset \sigma$, cuja origem é x_0. Temos, pela continuidade da projeção π, que o conjunto

$$\Omega = \{x \in \sigma_0\,;\, \pi(x) = \pi(x_0)\} \subset \sigma_0$$

é fechado em σ_0. Vejamos que este conjunto é também aberto em σ_0. Uma vez que $\Omega \neq \emptyset$ (pois $x_0 \in \Omega$), o resultado se seguirá, então, da conexidade de σ_0.

Dado $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n - A$, tomemos $r > 0$, tal que $B[x, r] \cap A = \emptyset$. Façamos, então,

$$\mu = \max_{z \in S[x,r]} d_A(z)$$

e observemos que $\mu > 0$, pois A é fechado e a esfera $S[x, r]$ é compacta e disjunta de A. Assim, podemos tomar $\lambda \in \mathbb{R}$ satisfazendo $0 < \lambda < \min\{1, \frac{r^2}{\mu^2}\}$ e definir a função

$$\begin{array}{rccc}\varphi: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & z & \longmapsto & d^2_{A_0}(z) - \lambda d^2_A(z)\end{array},$$

em que $A_0 = \{x\}$.

Pelo Corolário 1, φ é diferenciável e satisfaz, para todo $z \in \mathbb{R}^n$,

$$\nabla\varphi(z) = 2((z - x) - \lambda(z - \pi(z))).$$

Em particular, φ é contínua. Sendo assim, a restrição de φ à bola (compacta) $B[x, r]$ assume um valor mínimo em algum ponto $z_0 \in B[x, r]$. Entretanto, $\varphi(x) = -\lambda d^2_A(x) < 0$ e, para todo ponto z da esfera $S[x, r]$, tem-se

$$\varphi(z) = r^2 - \lambda d^2_A(z) \geq r^2 - \lambda\mu^2 > 0.$$

Segue-se que $z_0 \in B(x, r)$ e, portanto, que $\nabla\varphi(z_0) = 0$, isto é,

$$z_0 - x = \lambda(z_0 - \pi(z_0)). \tag{4.6}$$

Lembrando-se que $0 < \lambda < 1$, conclui-se de (4.6) que $x \in (\pi(z_0), z_0)$. Logo, pelas nossas considerações iniciais, $\pi(z_0) = \pi(x) = \pi(x_0)$, ou seja, $x \in (\pi(x_0), z_0)$ (Fig. 1). Fazendo-se, então, $r_0 = \|z_0 - x\|$, tem-se que $I_0 = B(x, r_0) \cap \sigma_0$ é um aberto de σ_0 que contém x e, claramente, está contido em $[x_0, z_0]$. Logo, todo ponto $y \in I_0$ satisfaz $\pi(y) = \pi(x_0)$, donde se infere que $I_0 \subset \Omega$ e, portanto, que Ω é aberto em σ_0. □

Demonstração do Teorema de Motzkin. Suponhamos que d_A seja diferenciável em $\mathbb{R}^n - A$. Então, vale o mesmo para $f = d^2_A$. Logo, pelo item (ii) do Lema 1, para quaisquer $x \in \mathbb{R}^n - A$ e $h \in \mathbb{R}^n$, tem-se

$$\begin{aligned}f'(x)h &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0_+} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} = T(h),\end{aligned}$$

donde $T = f'(x)$. Em particular,

$$Th = \langle \nabla f(x), h\rangle, \ \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Desta forma, tomando-se $a = x - \frac{\nabla f(x)}{2}$, tem-se, pela definição de T, que

$$\langle x - a, h\rangle \leq \langle x - b, h\rangle, \ \forall h \in \mathbb{R}^n, \ b \in \Pi(x).$$

Daí, tomando-se $b \in \Pi(x)$ e $h = b - a$, obtém-se $\|b - a\|^2 \leq 0$, ou seja, $b = a$. Logo, A é um conjunto de Chebyshev.

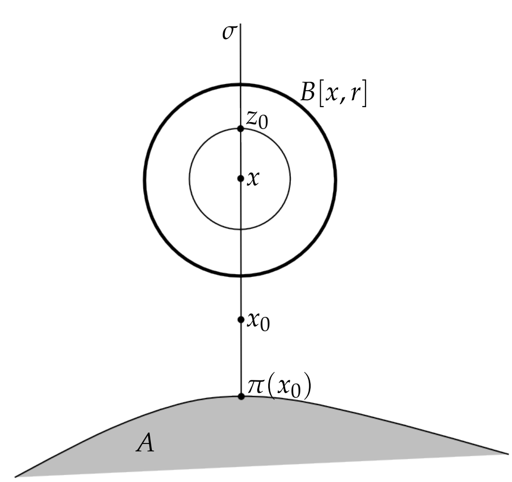

Figura 1

Agora, se $A \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto de Chebyshev, então, pelo Corolário 1, d_A^2 é diferenciável em $\mathbb{R}^n$ e, portanto, $d_A = \sqrt{d_A^2}$ é diferenciável em $\mathbb{R}^n - A$ (note que a função $t \mapsto \sqrt{t}$, $t \geq 0$, não é diferenciável em $t = 0$). Desta forma, (i) e (ii) são equivalentes.

Suponhamos agora que A seja convexo. Neste caso, dados $x \in \mathbb{R}^n - A$, $a \in \Pi(x)$ e $b \in A$, $b \neq a$, temos que o segmento fechado $[a, b]$ está contido em A. Logo, para todo $x_t = a + t(b - a) \in [a, b]$, $0 \leq t \leq 1$, tem-se

$$\begin{aligned} \|x-a\|^2 &\leq \|x - x_t\|^2 \\ &= \|x-a\|^2 - 2t\langle x-a, b-a\rangle + t^2\|b-a\|^2 \,, \end{aligned} \tag{4.7}$$

donde, para todo $t \in (0, 1]$, $2\langle x - a, b - a\rangle \leq t\|b - a\|^2$, o que nos dá $\langle x - a, b - a\rangle \leq 0$. Fazendo-se $t = 1$ na igualdade em (4.7), obtém-se, então,

$$\|x-b\|^2 - \|x-a\|^2 = -2\langle x-a, b-a\rangle + \|b-a\|^2 > 0 \,,$$

isto é, $\|x - a\| < \|x - b\|$. Segue-se que a é o único elemento de $\Pi(x)$ e, portanto, que A é de Chebyshev.

Finalmente, suponhamos que A seja de Chebyshev e, por absurdo, que não seja convexo. Então, existem $a, b \in A$, tais que $[a, b] \not\subset A$. Além disso, podemos supor, sem perda de generalidade, que o segmento aberto (a, b) não intersecta A. Com efeito, cada componente conexa de $(\mathbb{R}^n - A) \cap (a, b)$ é um aberto e conexo de (a, b) e, portanto, é um segmento da forma (a_0, b_0), em que $a_0, b_0 \in A$ (note que o segmento (a, b) é homeomorfo ao intervalo aberto $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ e que os únicos conjuntos abertos e conexos de $\mathbb{R}$ são os intervalos abertos) (Fig. 2).

Fazendo-se $\alpha(t) = a + t(b - a)$, $t \in [0, 1]$, tem-se, pelo Corolário 1, que a função $g(t) = d_A^2(\alpha(t))$ é contínua, diferenciável em $(0, 1)$ e satisfaz $g(0) = g(1) = 0$. Então, pelo Teorema de Rolle, existe $t_0 \in (0, 1)$, tal que

$$\begin{aligned} 0 = g'(t_0) &= \langle \nabla d_A^2(\alpha(t_0)), \alpha'(t_0)\rangle \\ &= 2\langle \alpha(t_0) - \pi(\alpha(t_0)), b - a\rangle \,, \end{aligned}$$

donde a semirreta σ, que contém $x_0 = \alpha(t_0) \in (a, b)$ e tem origem em $\pi(x_0)$, é ortogonal ao segmento$[a, b]$ (Fig. 3).

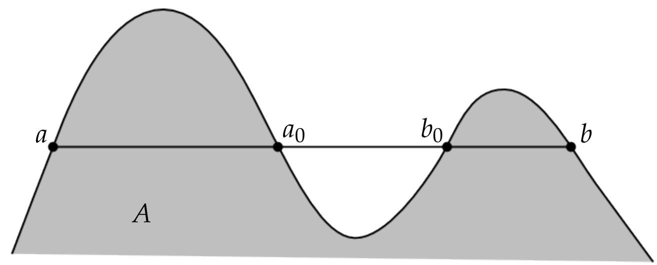

Figura 2

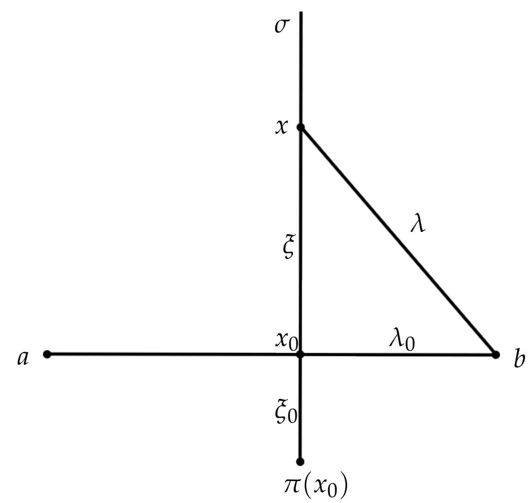

Figura 3

Definamos

$$u = \frac{x_0 - \pi(x_0)}{\|x_0 - \pi(x_0)\|}$$

e consideremos $x = x_0 + \xi u \in \sigma$. Escrevendo-se

$$\xi_0 = \|x_0 - \pi(x_0)\| \,,$$

$$\lambda_0 = \|b - x_0\|$$

e

$$\lambda = \|x - b\|$$

tem-se

$$d(x_0, A) = \xi_0 < \lambda_0 \,,$$

$$\|x - \pi(x_0)\| = \xi_0 + \xi$$

e

$$\lambda^2 = \xi^2 + \lambda_0^2 \,.$$

Logo, tomando-se $\xi > \frac{\lambda_0^2 - \xi_0^2}{2\xi_0}$, obtém-se

$$\begin{aligned} \|x - \pi(x_0)\|^2 &= (\xi_0 + \xi)^2 \\ &= \xi_0^2 + 2\xi_0\xi + \xi^2 \\ &> \lambda_0^2 + \xi^2 \\ &= \lambda^2 \\ &= \|x - b\|^2 , \end{aligned}$$

isto é,

$$\|x - b\| < \|x - \pi(x_0)\| .$$

Segue-se desta última desigualdade que $\pi(x) \neq \pi(x_0)$, o que contradiz o Lema 2. Desta forma, A é convexo e, portanto, as afirmações (ii) e (iii) são equivalentes. □

5 Considerações Finais

Uma vez estabelecido o Teorema de Motzkin, cabe-nos indagar sobre o comportamento da função distância d_A, no que diz respeito à diferenciabilidade, quando A é fechado, porém não-convexo. Neste caso, devido ao fato de d_A ser lipschtziana e de um resultado conhecido como Teorema de Rademacher (vide [2]), tem-se que o conjunto dos pontos onde d_A é diferenciável é não-vazio. Mais que isso, segue-se deste teorema que o conjunto

$$\Gamma_A = \{x \in \mathbb{R}^n;\, d_A \text{ não é diferenciável em } x\}$$

é, num certo sentido, pequeno[3].

Este fato pode ser constatado levando-se em consideração que, pelos argumentos da primeira parte da demonstração do Teorema de Motzkin, o conjunto Γ_A coincide com aquele formado pelos pontos $x \in \mathbb{R}^n$, tais que $\Pi(x)$ contém mais de um elemento. Por exemplo, tomando-se $x \in \mathbb{R}^n$, tem-se que a esfera $S[x,r]$ de $\mathbb{R}^n$ e o cilindro $S[x,r] \times \mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ são conjuntos fechados, não-convexos e tais que

$$\Gamma_{S[x,r]} = \{x\} \quad \text{e} \quad \Gamma_{S[x,r]\times\mathbb{R}} = \{(0,0,z) \in \mathbb{R}^3;\, z \in \mathbb{R}\} .$$

Outra questão naturalmente associada ao Teorema de Motzkin é a da validez do mesmo em espaços vetoriais de dimensão infinita, especialmente espaços de Banach e espaços de Hilbert. Há uma extensa literatura concernente a esta questão (vide [1]). No entanto, até a presente data, não se sabe se um conjunto de Chebyshev num espaço de Hilbert arbitrário é ou não é convexo.

[3] Mais precisamente, tem medida de Lebesgue nula.

Referências

[1] Balaganskii, V. S.; Vlasov, L. P. The problem of the convexity of Chebyshev sets. *Russian Math. Surveys*, v. 51, n. 6, p. 1127–1190, 1996.

[2] Heinonen, J. *Lectures on analysis on metric spaces*. New York: Springer, 2001. (Universitext)

[3] Hörmander, L. *Notions of convexity*. Reprint of the 1994 edition. Boston: Birkhäuser, 2007. (Modern Birkhäuser Classics)

[4] Motzkin, T. Sur quelques propriétés charactéristiques des ensembles convexes. *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Rendiconti. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali*, v. 21, p. 562–567, 1935.

[5] Parker, M. J. Convex sets and the subharmonicity of the distance function. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 103, n. 2, p. 503–506, 1988.

[6] Phelps, R. R. Convex sets and nearest points. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 8, p. 790–797, 1957.

[7] Valentine, F. A. *Convex sets*. New York: McGraw-Hill, 1964.

[8] Webster, R. *Convexity*. Oxford: Oxford University Press, 1994.

Ronaldo Freire de Lima
Departamento de Matemática
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
ronaldo@ccet.ufrn.br